BAB IV

PRINSIP-PRINSIP KONVEKSI

Aliran Viscous

Berdasarkan gambar 1 dan 2, yaitu aliran fluida pada pelat rata, gaya viscous dijelaskan dengan tegangan geser τ diantara lapisan fluida dengan rumus:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \qquad (4\text{-}1)$$

dimana: μ = viskositas dinamik

u = kecepatan

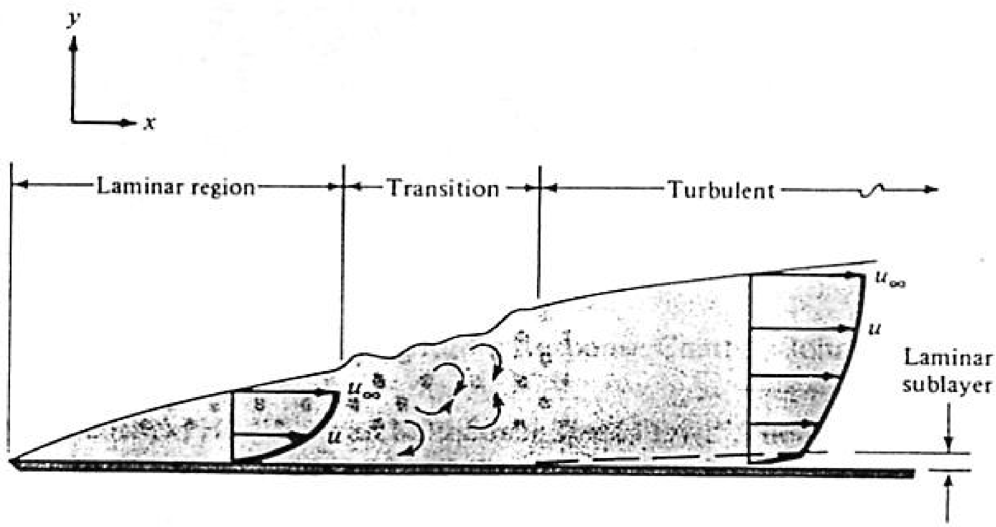


Fig. 5-1 Sketch showing different boundary-layer flow regimes on a flat plate.

Gambar 1. Sketsa yang menunjukkan daerah aliran lapisan batas yang berbeda pada pelat rata.

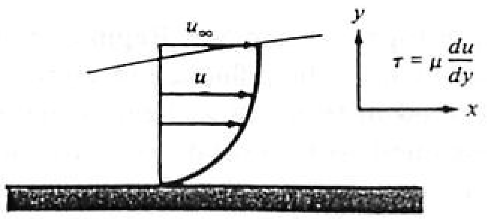


Fig. 5-2 Laminar velocity profile on a flat plate.

Gambar 2. Profil kecepatan laminar pada pelat rata.

Daerah aliran yang bergerak dari sisi pelat d tempat observasi viskositas disebut *lapisan batas* (boundary layer). Pertama-tama perkembangan lapisan batas adalah *laminar* namun pada suatu jarak kritis dari sisi awal pelat, bergantung pada medan aliran dan sifat fluida, terjadi gangguan dan gangguan ini akan diperkuat, dan proses transisi terjadi hingga aliran menjadi *turbulen.* Daerah turbulen ini bisa digambarkan sebagai sebuah gaya kocok yang bekerja sehingga bagian fluida akan bergerak bolak balik. Transisi dari aliran laminar ke aliran turbulen terjadi ketika:

$$\frac{u_\infty x}{\upsilon} = \frac{\rho u_\infty x}{\mu} > 5 \times 10^5$$

dimana : u_∞ =kecepatan aliran bebas

x = jarak dari sisi awal

$\upsilon = \mu/\rho$ = viskositas kinematik

Kelompok persamaan diatas disebut bilangan Reynold dan tidak berdimensi.

$$\mathrm{Re}_x = \frac{u_\infty x}{\upsilon} \qquad (4\text{-}2)$$

Angka Reynold kritis untuk transisi aliran dari laminar ke turbulen secara teoritis diambil 5 x 10^5, dalam prakteknya harga ini bergantung pada kondisi kekasaran permukaan dan tingkat turbulensi aliran bebas. Kisaran normal untuk mulainya daerah transisi antara 5 x 10^5 sampai dengan 10^6.

Dengan adanya disturbansi yang sangat besar di dalam aliran, transisi bisa mulai terjadi pada bilangan Reynold serendah 10^5, dan untuk aliran yang bebas dari adanya fluktuasi, daerah transisi bisa terjadi pada bilangan Reynold 2 x 10^6 atau lebih.

Bentuk relatif profil kecepatan pada aliran laminar dan turbulen ditunjukkan oleh gambar 1. Profil laminar berbentuk parabola, sedangkan profil turbulen berbentuk linier di dekat dinding. Bentuk linier ini karena adanya sublapisan laminar pada dinding. Diluar sublapisan ini, profil kecepatan lebih rata jika dibandingkan dengan profil laminar.

Mekanisme fisik dari viskositas adalah sebuah pertukaran momentum. Misalkan aliran adalah laminar, molekul bisa berpindah dari satu lamina ke lamina lainnya, membawa momentum sesuai dengan kecepatan aliran. Terdapat momentum netto yang bergerak dari daerah dengan kecepatan tinggi ke daerah kecepatan rendah, sehingga menimbulkan sebuah gaya dalam arah aliran fluida. Gaya ini adalah *tegangan geser viskos* yang bisa dihitung dengan persamaan 4.1.

Pada daerah aliran turbulen, lapisan fluida yang jelas tidak lagi terlihat dan kita harus membuat konsep yang sedikit berbeda untuk aksi viskos. Gambaran kualitatif dari proses aliran turbulen bisa didapatkan dengan membayangkan bongkahan makroskopik fluida yang akan memindahkan energi dan momentum daripada pemindahan mikroskopik yang dilakukan oleh molekul tunggal.

Misalkan terdapat aliran di dalam tabung seperti yang ditunjukkan gambar 3. Lapisan batas berkembang pada sisi masuk. Lapisan batas mengisi keseluruhan pipa, dan aliran disebut berkembang penuh. Jika aliran laminar, pprofil kecepatan berbentuk parabola akan didapatkan (Gambar 3a). Jika aliran adalah turbulen, akan didapatkan profile kecepatan yang lebih tumpul seperti yang ditunjukkan gambar 3b. Untuk menentukan aliran maka tetap digunakan bilangan Reynold, dimana untuk aliran turbulen adalah:

$$\mathrm{Re}_d = \frac{u_m d}{\upsilon} > 2300 \qquad (4\text{-}3)$$

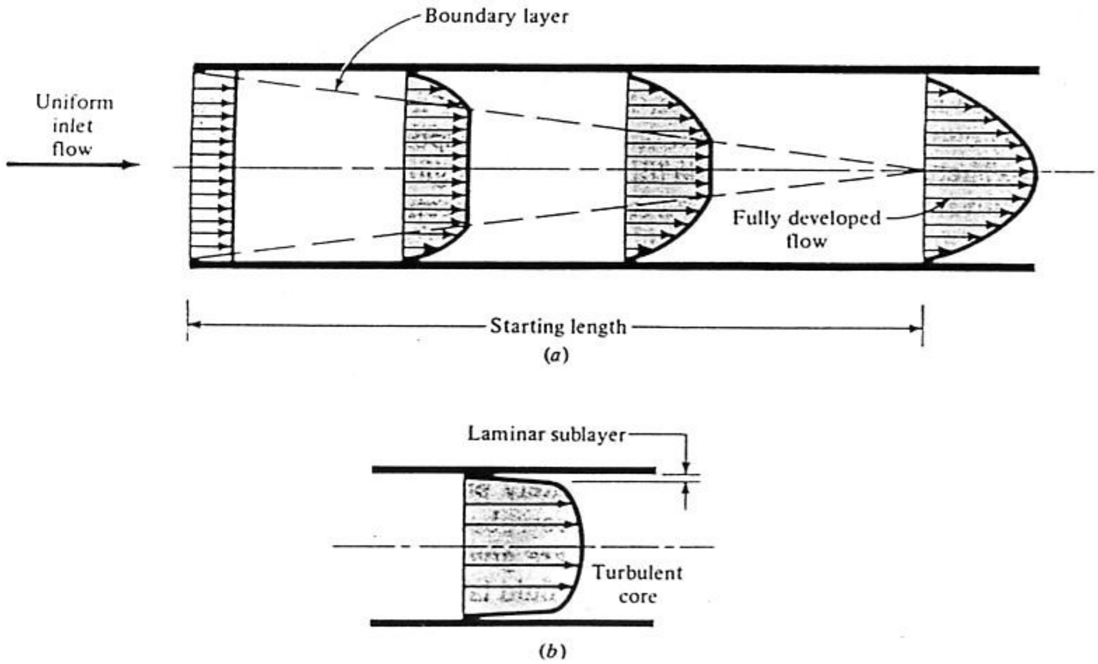


Fig. 5-3 Velocity profile for (a) laminar flow in a tube and (b) turbulent tube flow.

Gambar 3. Profil kecepatan untuk (a) aliran laminar di dalam pipa dan (b) aliran turbulen di dalam pipa.

Angka Reynold untuk daerah transisi bergantung pada kekasaran pipa dan kehalusan aliran. Umumnya kisaran untuk daerah transisi adalah:

$$2000 < Re_d < 4000$$

Persamaan kontinuitas untuk aliran satu dimensi di dalam pipa adalah:

$$\dot{m} = \rho u_m A \qquad (4\text{-}4)$$

dimana: m = laju massa aliran

u_m = kecepatan rata-rata

A = luas penampang

Kecepatan massa didefinisikan sebagai:

$$\text{Kecepatan massa} = G = m/A = \rho u_m \qquad (4\text{-}5)$$

Sehingga bilangan Reynold bisa ditulis :

$$\mathrm{Re}_d = \frac{Gd}{\mu} \qquad (4\text{-}6)$$

Contoh Soal 1

Air pada suhu 20⁰C mengalir dengan massa 8 kg/s melewati difuser seperti ditunjukkan gambar berikut ini. Diameter pada penampang 1 adalah 3,0 cm, dan diameter pada penampang 2 adalah 7,0 cm. Carilah kenaikan tekanan statik antara penampang 1 dan penampang 2. Anggaplah aliran tanpa gesekan.

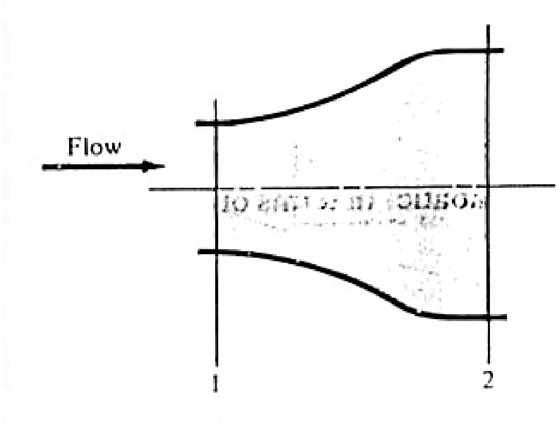


Fig. Ex. 5-1

Jawab:

Luas penampang aliran adalah:

$A_1 = \pi d_1^2/4 = \pi(0{,}03)^2/4 = 7{,}069 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}^2$

$A_2 = \pi d_2^2/4 = \pi(0{,}07)^2/4 = 3{,}848 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}^2$

Kerapatan air pada 20^0 C adalah 1000 kg/m^3, sehingga:

$$u = \frac{\dot{m}}{\rho A}$$

$$u_1 = \frac{8{,}0}{(1000)(7{,}069\mathrm{x}10^{-4})} = 11{,}32 \text{ m/s}$$

$$u_2 = \frac{8{,}0}{(1000)(3{,}848\mathrm{x}10^{-4})} = 2{,}079 \text{ m/s}$$

Perbedaan tekanan diperoleh dengan persamaan Bernouli :

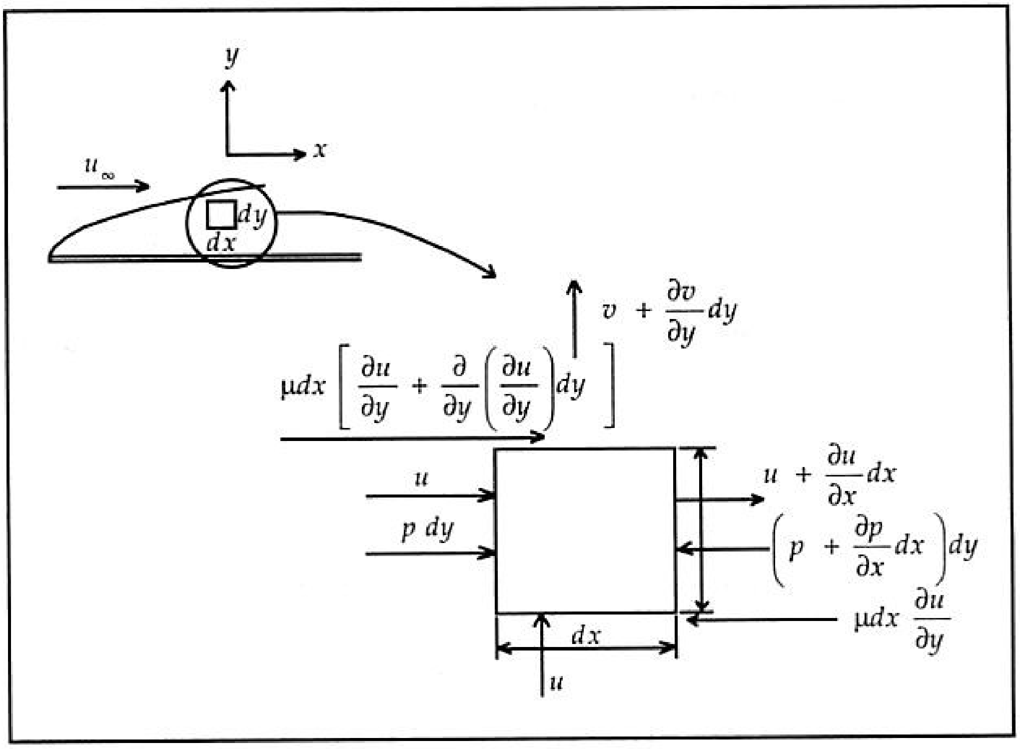
$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} = \frac{1}{2g_c}(u_1^2 - u_2^2)$$

$$p_2 - p_1 = \frac{1000}{2}\left[(11{,}32)^2 - (2{,}079)^2\right]$$

$$= 61{,}91 \text{ kPa}$$

Lapisan Batas Laminar Pada Pelat Rata

Perhatikan unsur volume atur/kendali seperti gambar 4. Persamaan gerakan untuk lapisan batas dapat diturunkan dengan membuat neraca gaya dan momentum pada unsur volume tersebut.



Gambar 4. Unsur volume atur untuk neraca gaya pada lapisan batas laminar.

Untuk menyederhanakan analisis diandaikan:

1. Fluida tak mampu mampat dan aliran stedi/tunak.
2. Tidak terdapat perubahan tekanan diarah tegak lurus pelat.
3. Viskositas tetap.

4. Gaya geser viskos di arah *y* dapat diabaikan.

Kita terapkan hukum kedua Newton tentang gerak.

$$\sum F_x = \frac{d(mV)_x}{d\tau}$$

Persamaan diatas berlaku untuk massa tetap. Untuk memudahkan analisis, digunakan unsur volume atur/kendali seperti yang ditunjukkan gambar 4, dimana massa mengalir ke dalam dari satu sisi dan keluar dari sisi yang lain. Untuk sistem ini, neraca gaya dapat dituliskan sebagai:

$$\Sigma F_x = \text{tambahan fluks momentum pada arah } x$$

Fluks momentum pada arah *x* adalah hasil perkalian massa melalui satu sisi tertentu dari volume kendali dan komponen *x* kecepatan pada titik itu.

Massa yang masuk dari muka kiri unsur itu persatuan waktu adalah:

$$\rho u \, dy$$

Jika kita andaikan satu satuan kedalaman pada arah *z*, jadi momentum masuk pada muka kiri persatuan waktu adalah:

$$\rho u \, dy \, u = \rho u^2 \, dy$$

Massa yang keluar dari muka kanan:

$$\rho\left[u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right] dx$$

dan momentum yang keluar dari muka kanan adalah:

$$\rho\left[u + \frac{\partial u}{\partial x dx}\right]^2 dy$$

Aliran yang masuk dari muka bawah:

$$\rho \upsilon \, dx$$

Aliran massa keluar dari muka atas adalah:

$$\rho\left[\upsilon + \frac{\partial \upsilon}{\partial y}dy\right]dx$$

Neraca massa pada unsur itu memberikan:

$$\rho u dy + \rho \upsilon dx = \rho\left[u + \frac{\partial u}{\partial y}dx\right]dy + \rho\left[\upsilon + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right]dx$$

atau:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon}{\partial y} = 0 \qquad (4\text{-}7)$$

Persamaan ini adalah persamaan kontinuitas untuk lapisan batas.

Kembali kepada analisis momentum dan gaya, momentum pada arah *x* yang masuk melalui muka bawah adalah :

$$\rho \upsilon u \, dx$$

dan momentum pada arah *x* yang keluar dari muka atas adalah:

$$\rho\left[\upsilon + \frac{\partial \upsilon}{\partial y}dy\right]\left[u + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right]dx$$

Bagi kita hanya momentum arah *x* yang penting, karena gaya yang menjadi perhatian kita adalah gaya pada arah *x.* Gaya-gaya ini adalah gaya-gaya yang disebabkan oleh geser viskos dan gaya tekanan pada unsur.

Gaya tekanan pada muka kiri pdy , dan pada muka kanan

$$-\left[p + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)dx\right]dy$$

Sehingga gaya tekanan netto pada arah gerakan adalah:

$$-\frac{\partial p}{\partial x}dxdy$$

Gaya geser viskos pada muka bawah:

$$-\mu \frac{\partial u}{\partial y} dx$$

Dan gaya geser pada muka atas:

$$\mu\, dx \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) dy \right]$$

Gaya geser viskos netto pada arah gerakan adalah jumlah kedua gaya diatas.

Gaya geser viskos netto $= \mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} dxdy$

Dengan menyamakan jumlah gaya geser viskos dan gaya tekanan dengan perpindahan momentum pada arah *x*, diperoleh:

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dxdy - \frac{\partial p}{\partial x} dxdy = \rho \left[u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right]^2 dy - \rho u^2 dy + \rho \left[\upsilon + \frac{\partial \upsilon}{\partial y} dy \right]\left[u + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right] dx$$
$$-\rho\, \upsilon u dx$$

Disederhanakan dengan persaman kontinuitas (4-7) dan mengabaikan diferensial orde kedua, diperoleh:

$$\rho \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + \upsilon \frac{\partial u}{\partial y} \right] = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial p}{\partial x} \qquad (4\text{-}8)$$

Persamaan ini adalah persamaan momentum untuk lapisan batas laminar dengan sifat-sifat tetap.

Dengan penurunan rumus, maka tinggi lapisan batas:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4{,}64}{Re_x^{1/2}}$$

dimana : δ = tinggi lapisan batas

x = jarak dari ujung pelat

$Re_x = (u_\infty\, x)/\nu$

Atau bisa juga dicari dengan rumus:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5,0}{Re_x^{1/2}}$$

<u>Contoh soal</u>

Udara pada 27 ^{0}C dan 1 atm mengalir pada sepanjang pelat datar dengan kecepatan 2 m/s. Hitunglah ketebalan lapisanbatas pada jarak 20 dan 40 cm dari sisi masuk pelat. Hitung juga aliran massa yang memasuki lapisan batas antara x = 20 cm dan x = 40 cm. Viskositas udara pada 27 ^{0}C adalah 1,85 x 10^{-5} kg/m.s. Diasimsikan satuan kedalaman pada arah z.

<u>Jawab</u>

Kerapatan udara dihitung dari:

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{1,0132\, x\, 10^5}{(287)\ \ (300)} = 1,177$$

Angka Reynold:

Pada x = 20 cm: $$Re = \frac{(1,177)(2,0)(0,2)}{1,85\, x\, 10^{-5}} = 27.580$$

Pada x = 40 cm: $$Re = \frac{(1,177)(2,0)(0,4)}{1,85\, x\, 10^{-5}} = 55.160$$

Ketebalan lapisan batas:

Pada x = 20 cm: $$\delta = \frac{(4,64)(0,2)}{(27.580)^{1/2}} = 0,00559$$

Pada x = 40 cm: $$\delta = \frac{(4,64)(0,4)}{(27.580)^{1/2}} = 0,0079$$

Untuk menghitung aliran massa yang memasuki lapisan batas antara x = 20 cm dan x = 40 cm, adalah dengan mengukur perbedaan aliran massa yang masuk pada kedua posisi ini. Aliran massa lapisan batas dirumuskan:

$$\int_{o}^{\delta} \rho u \, dy$$

dimana kecepatan dicari dengan:

$$u = u_\infty \left[\frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \right]$$

maka:

$$\int_0^{\delta} \rho u_\infty \left[\frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \right] dy = \frac{5}{8}\rho u_\infty \delta$$

$$\Delta m = \frac{5}{8}\rho u_\infty (\delta_{40} - \delta_{20})$$

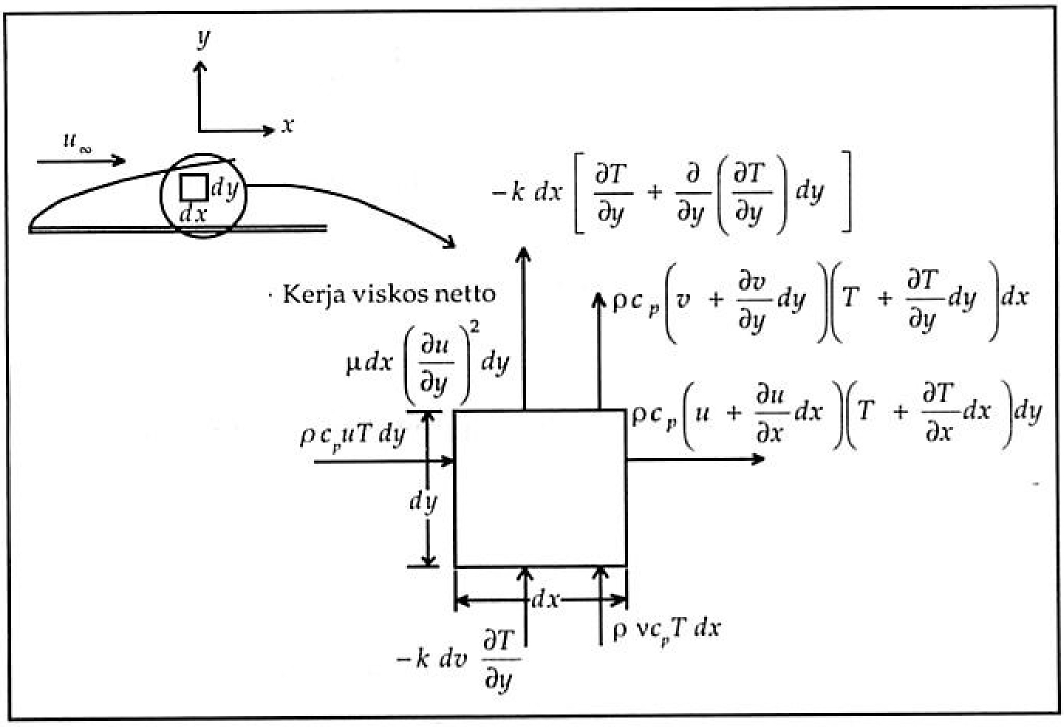
$$= \left(\frac{5}{8}\right)(1{,}177)(2{,}0)(0{,}0079 - 0{,}00559)$$

$$= 3{,}399 \times 10^{-3} \text{ kg/s}$$

Persamaan Energi Lapisan Batas

Perhatikan unsur volume atur seperti tampak pada gambar dibawah ini. Untuk menyederhanakan analisis, diasumsikan:

1. Aliran stedi tak mampu-mampat (incompressible).
2. Viskositas, konduktivitas kalor, dan kalor spesifik tetap.
3. Konduksi kalor pada arah aliran (arah *x*) dapat diabaikan.



Gambar 5. Unsur volume atur untuk analisis energi lapisan batas laminar.

Lalu untuk unsur tersebut dapat kita buat neraca energi:

Energi dikonveksikan pada muka kiri + energi dikonveksikan pada muka bawah + kalor dikonduksikan pada muka bawah + kerja viskos netto pada unsur = Energi dikonveksikan pada muka kanan + energi dikonveksikan pada muka atas + kalor dikonduksikan dari muka atas.

Besaran energi konduksi dan konveksi ditunjukkan oleh Gambar 5 di atas, dan suku energi untuk kerja viskos dapat diturunkan sebagai berikut, kerja viskos dapat dihitung sebagai hasil perkalian antara gaya geser viskos netto dengan jarak perpindahan gaya ini dalam satuan waktu. Gaya geser viskos ialah hasil perkalian gaya geser dengan luas dx.

$$\mu\,\frac{\partial u}{\partial y}dx$$

Dan jarak perpindahan per satuan waktu terhadap unsur volume atur $dx\,dy$ adalah:

$$\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

Sehingga energi viskos netto yang diserahkan pada unsur itu adalah:

$$\mu\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]^2 dxdy$$

Neraca energi dengan besaran-besaran yang ditunjukkan pada Gambar 5, dan mengandaikan satu satuan tebal pada arah *z*, serta mengabaikan diferensial orde kedua, menghasilkan:

$$\rho c_p\left[u\frac{\partial T}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial T}{\partial y}+T\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)\right]dxdy = k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dxdy$$

Dengan menggunakan persamaan kontinuitas:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon}{\partial y} = 0 \qquad (4\text{-}9)$$

Dan membagi dengan ρc_p, kita peroleh:

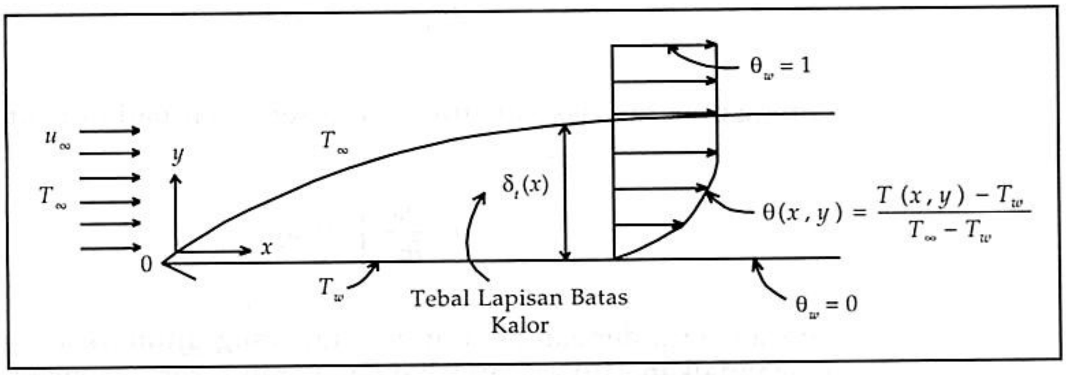
$$\mu\frac{\partial T}{\partial y}+\upsilon\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\mu}{\rho c_p}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]^2 \qquad (4\text{-}10)$$

Persamaan ini adalah persamaan energi lapisan batas laminar. Bagian kiri menunjukkan energi netto ke dalam volume atur, dan bagian kanan menunjukkan jumlah kalor netto yang dihantarkan ke luar volume atur dan kerja viskos yang dilakukan atas unsur itu. Suku viskos hanya penting pada kecepatan tinggi karena harganya relatif kecil pada kecepatan rendah.

Lapisan Batas Kalor

Lapisan batas kalor didefinisikan sebagai daerah di mana terdapat gradien suhu dalam aliran. Gradien suhu itu adalah akibat proses pertukaran kalor antara fluida dan dinding.

Perhatikan gambar di bawah ini. Suhu pada dinding adalah T_w, dan suhu pada fluida di luar lapisan batas kalor adalah T_∞ sedang tebal lapisan batas kalor adalah δ_t.



Gambar 6. Profil suhu pada lapisan batas kalor

Pada dinding kecepatan aliran adalah nol, dan perpindahan kalor ke fluida berlangsung secara konduksi. Jadi fluks kalor setempat persatuan luas q'' adalah:

$$\frac{q}{A} = q'' = -k \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right]_{dinding} \tag{4-11}$$

Dari hukum pendinginan Newton,

$$q'' = h\,(T_w - T_\infty) \tag{4-12}$$

dimana h adalah koefisien perpindahan kalor konveksi. Dengan menggabungkan kedua persamaan tersebut, diperoleh:

$$h = \frac{-k(\partial T/\partial y)_{dinding}}{T_w - T_\infty}$$

Sehingga kita hanya perlu menemukan gradien suhu pada dinding untuk menilai koefisien perpindahan kalor. Hal ini berarti kita harus mendapatkan suatu persamaan tentang distribusi suhu.

Kondisi yang harus dipenuhi oleh distribusi suhu itu adalah:

$T = T_w$ pada $y = 0$ (a)

$\partial T/\partial y = 0$ pada $y = \delta_t$ (b)

$T = T_\infty$ pada $y = \delta_t$ (c)

Dan dengan menuliskan persamaan (4-10) pada y = 0 tanpa pemanasan viskos, maka:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{pada } y = 0 \qquad \text{(d)}$$

karena kecepatan harus sama dengan nol pada dinding.

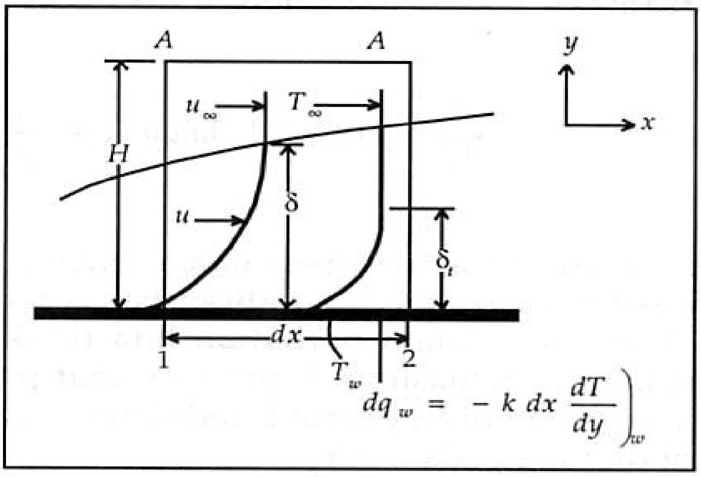
Kondisi (a) sampai (d) dapat dipenuhi oleh polinomial kubus sebagaimana dalam hal profil kecepatan, sehingga

$$\frac{\theta}{\theta_\infty} = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta_t} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3 \qquad \text{(4-13)}$$

di mana $\theta = T - T_w$.

Sekarang kita tinggal menemukan persamaan untuk δ_t yaitu tebal lapisan batas kalor.

Perhatikan volume atur yang dibatasi oleh bidang-bidang 1,2,A-A dan dinding seperti gambar 7 dibawah ini. Kita andaikan lapisan kalor lebih tipis dari lapisan batas hidrodinamik, seperti pada gambar. Suhu dinding adalah T_w, suhu aliran bebas T_∞ dan kalor yang dilepaskan ke fluida pada panjang *dx* adalah dq_w.



Gambar 7. Volume atur untuk analisis energi lapisan batas laminar.

Sekarang kita buat neraca energi:

Energi yang dikonversikan ke dalam + kerja viskos dalam unsur + perpindahan kalor pada dinding = energi yang dikonversikan ke luar.

Energi yang dikonversikan ke dalam melalui bidang 1 adalah:

$$\rho\, C_p \int_\alpha^H uTdy$$

Dan energi yang dikonversikan ke luar melalui bidang 2:

$$\rho\, C_p\left[\int_0^H uTdy\right] + \frac{d}{dx}\left[\rho\, C_p \int_0^H uTdy\right] dx$$

Aliran massa melalui bidang A-A adalah:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0 \rho\, udy\right] dx$$

Dengan membawa energi sebesar:

$$C_p T_\alpha\, \frac{d}{dx}\left[\int_0^H \rho\, udy\right] dx$$

Kerja viskos netto yang dilakukan di dalam unsur itu adalah:

$$\mu\left[\int_0^H\left(\frac{du}{dy}\right)^2 dy\right]dx$$

Dan perpindahan kalor melalui dinding:

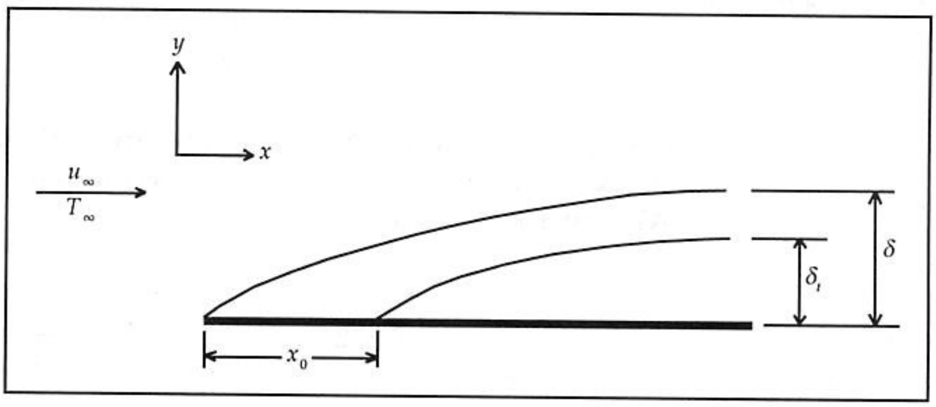
$$dq_w = -kdx\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_w$$

Dengan menggabungkan besaran-besaran energi ini sesuai dengan persamaan 4-13 dan mengumpulkan suku-sukunya, kita peroleh:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^H (T_\alpha - T)udy\right] + \frac{\mu}{\rho C_p}\left[\int_0^H\left(\frac{du}{dy}\right)^2 dy\right] = \alpha\,\frac{\partial T}{\partial y} \qquad \text{(4-14)}$$

Persamaan ini adalah persamaan energi integral lapisan batas untuk keadaan sifat-sifat tetap dan suhu aliran bebas tetap T_w .

Pelat yang dalam perhatian kita tidak perlu dipanaskan pada keseluruhan panjangnya. Situasinya dapat kita lihat pada gambar 8 di bawah ini, dimana lapisan batas hidrodinamik terbentuk pada tepi depan pelat, sedang pemanasan baru dimulai pada $x = x_0$.



Gambar 8. Lapisan batas hidrodinamika dan lapisan batas kalor diatas pelat rata.

Penyelesaian akhir dari persamaan untuk tebal lapisan batas kalor adalah sebagai berikut:

$$\xi = \frac{\delta_t}{\delta} = \frac{1}{1{,}026}\mathrm{Pr}^{-1/3}\left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{3/4}\right]^{1/3} \qquad (4\text{-}15)$$

P_r disebut sebagai angka **Prandtl** yaitu parameter yang meghubungkan ketebalan relatif antara lapisan batas hidrodinamika dan lapisan batas kalor.

Angka Prandtl juga merupakan penghubung antara medan kecepatan dan medan suhu.

$$\mathrm{Pr} = \frac{\upsilon}{\alpha} = \frac{\mu / \rho}{k / \rho\, C_p} = \frac{C_p \mu}{k} \qquad (4\text{-}16)$$

dengan: C_p = kapasitas kalor

μ = viskositas dinamik

k = konduktivitas kalor

Kembali kepada analisis kita, kita mempunyai:

$$h = \frac{-k(\partial T / \partial y)_w}{T_w - T_\infty} = \frac{3}{2}\frac{k}{\delta_t} = \frac{3}{2}\frac{k}{\zeta\ \delta} \qquad (4\text{-}17)$$

Von Karman memberikan persamaan momentum untuk lapisan batas laminar dengan sifat-sifat tetap dengan :

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4{,}64}{\mathrm{Re}_x^{1/2}} \qquad (4\text{-}18)$$

Dengan memasukkan tebal lapisan batas hidrodinamik dari persamaan (4-18) dan menggunakan persamaan (4-15), diperoleh:

$$h_x = 0{,}332\,\mathrm{Pr}^{1/3}\left(\frac{u_\infty}{\upsilon\, x}\right)^{1/2}\left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{3/4}\right]^{-1/3} \qquad (4\text{-}19)$$

Persamaan ini dapat dibuat tak berdimensi dengan mengalikan kedua sisi persamaan dengan x/k, sehingga menghasilkan kelompok tak berdimensi pada bagian kiri,

$$Nu_x = \frac{h_x x}{k} \tag{4-20}$$

yang disebut bilangan **Nusselt**.

Akhirnya kita dapatkan:

$$Nu_x = 0{,}332 \Pr^{1/3} \mathrm{Re}_x^{\,1/2} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{3/4} \right]^{-1/3} \tag{4-21}$$

Untuk pelat yang dipanaskan di keseluruhan panjangnya, x_0 = 0 maka persamaan (4-21) menjadi:

$$Nu_x = 0{,}332.\Pr^{1/3} \mathrm{Re}_x^{\,1/2} \tag{4-22}$$

Persamaan (4-19), (4-21), dan (4-22), menyatakan harga lokal koefisien perpindahan kalor berhubungan dengan jarak dari sisi masuk pelat dan sifat-sifat fluida. Untuk harga x_0 = 0, koefisien perpindahan kalor rata-rata dan angka Nusselt bisa dicari dari integrasi sepanjang panjang pelat.

$$\bar{h} = \frac{\int_0^L h_x \, dx}{\int_0^L dx} = 2\, h_{x=L} \tag{4-23}$$

$$\bar{Nu}_L = \frac{\bar{h} L}{k} = 2\, Nu_{x=L} \tag{4-24}$$

atau $$\bar{Nu}_L = \frac{\bar{h} L}{k} = 0{,}664\, Re_L^{1/2}\, Pr^{1/3} \tag{4-25}$$

dimana $$Re_L = \frac{\rho\, u_\infty L}{\mu}$$

Dengan asumsi sifat-sifat fluida konstan sepanjang aliran, jika terdapat variasi antara kondisi dinding dengan aliran bebas, sifat-sifat fluida bisa dicari dari *temperatur film,* T_f, yang disebut juga rata-rata aritmatik antara temperatur dinding dan aliran bebas,

$$T_f = \frac{T_w + T_\infty}{2} \qquad (4\text{-}26)$$

T_f = Temperatur film

Fluks Kalor Konstan

Analisis di atas menganggap perpindahan kalor laminar pada permukaan isotermal. Dalam praktek, fluks kalor di permukaan biasanya konstan, dan perlu dicari distribusi temperatur permukaan pelat untuk suatu fluida tertentu. Untuk fluks kalor konstan, bilangan Nusselt dicari dengan rumus:

$$Nu_x = \frac{hx}{k} = 0{,}453\, Re_x^{1/2} Pr^{1/3} \qquad (4\text{-}27)$$

$$Nu_x = \frac{q_{wx}}{k(T_w - T_\infty)} \qquad (4\text{-}28)$$

Perbedaan temperatur rata-rata sepanjang pelat untuk fluks kalor konstan diperoleh dengan integrasi:

$$\overline{T_w - T_\infty} = \frac{1}{L}\int_0^L (T_w - T_\infty)\, dx = \frac{1}{L}\int_0^L \frac{q_w\, x}{k\, Nu_x} dx$$

$$= \frac{q_w L/k}{0{,}6795\, Re_L^{1/2} Pr^{1/3}} \qquad (4\text{-}29)$$

$$q_w = \frac{3}{2} h_x = L(\overline{T_w - T_\infty})$$