

BAB III

KONDUKSI ALIRAN STEDI - DIMENSI BANYAK

Untuk aliran stedi tanpa pembangkitan panas, persamaan Laplacenya adalah:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (6-1)$$

Aliran kalor pada arah x dan y bisa dihitung dengan persamaan Fourier:

$$q_x = -kA_x \frac{\partial T}{\partial x} \quad (6-2)$$

$$q_y = -kA_y \frac{\partial T}{\partial y} \quad (6-3)$$

Aliran kalor total pada suatu titik di suatu material adalah resultan q_x dan q_y pada titik tersebut. Vektor aliran kalor total adalah tegak lurus pada garis isothermal seperti ditunjukkan gambar 1. Sehingga jika distribusi temperatur suatu material diketahui, kita dengan mudah bisa menentukan aliran panas.

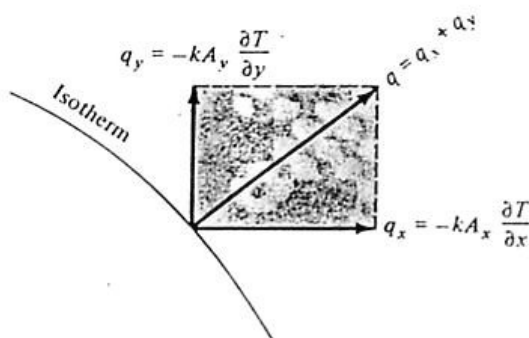


Fig. 3-1 Sketch showing the heat flow in two dimensions.

Analisis Matematik Konduksi Kalor Dua Dimensi

Misalkan sebuah pelat persegi seperti yang ditunjukkan gambar 2, tiga sisi pelat dijaga pada temperatur T_1 , dan sisi atas mempunyai distribusi temperatur tertentu. Distribusi temperatur tersebut bisa merupakan distribusi temperatur konstan atau bisa jadi lebih kompleks, misalnya distribusi sinus.

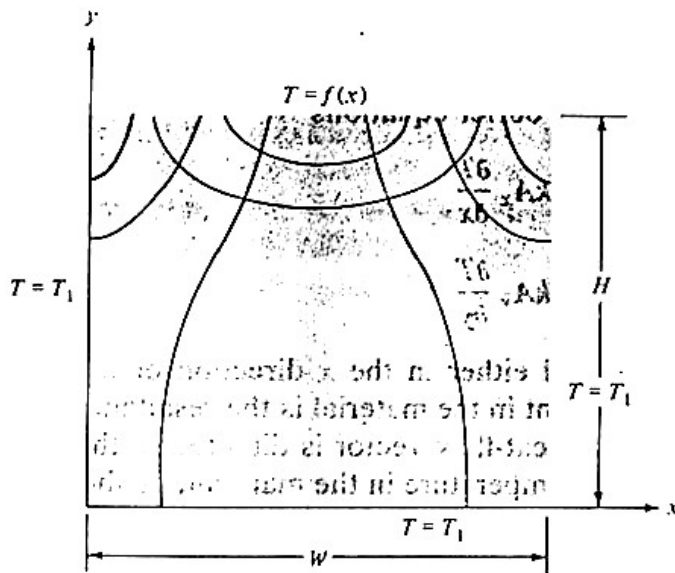


Fig. 3-2 Isotherms and heat flow lines in a rectangular plate.

Solusi persamaan diferensial dari (6-1) diasumsikan berbentuk:

$$T = XY \quad \text{dimana} \quad X = X(x) \quad (6-4)$$

$$Y = Y(y)$$

Distribusi temperatur berbentuk sinus, dan kondisi batas:

$$T = T_1 \quad \text{pada} \quad y = 0$$

$$T = T_1 \quad \text{pada} \quad x = 0 \quad (6-5)$$

$$T = T_1 \quad \text{pada} \quad x = W$$

$$T = T_m \sin\left(\frac{\pi x}{W}\right) + T_1 \quad \text{pada} \quad y = H$$

dimana T_m adalah amplitudo fungsi sinus. Substitusi persamaan (6-4) ke (6-1) menghasilkan:

$$-\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} \quad (6-6)$$

Masing-masing sisi persamaan diatas adalah tak bergantung karena x dan y adalah variabel tak bergantung. Karenanya setiap sisi persamaan sama dengan suatu konstanta. Maka didapat dua persamaan:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \quad (6-7)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \lambda^2 Y = 0 \quad (6-8)$$

dimana λ^2 disebut *konstanta separasi*. Persamaan diatas diuji terhadap kondisi batas.

Untuk $\lambda^2 = 0$:

$$\begin{aligned} X &= C_1 + C_2 x \\ Y &= C_3 + C_4 y \\ T &= (C_1 + C_2 x)(C_3 + C_4 y) \end{aligned} \quad (6-9)$$

Fungsi ini tidak memenuhi kondisi batas fungsi sinus, jadi solusi untuk $\lambda^2 = 0$ tidak dipakai.

Untuk $\lambda^2 < 0$:

$$\begin{aligned} X &= C_5 e^{-\lambda x} + C_6 e^{\lambda x} \\ Y &= C_7 \cos \lambda y + C_8 \sin \lambda y \\ T &= (C_5 e^{-\lambda x} + C_6 e^{\lambda x})(C_7 \cos \lambda y + C_8 \sin \lambda y) \end{aligned} \quad (6-10)$$

Terlihat, bahwa kondisi batas fungsi sinus tak terpenuhi, jadi jawaban ini tidak digunakan.

Untuk $\lambda^2 > 0$:

$$\begin{aligned} X &= C_9 \cos \lambda x + C_{10} \sin \lambda x \\ Y &= C_{11} e^{-\lambda y} + C_{12} e^{\lambda y} \\ T &= (C_9 \cos \lambda x + C_{10} \sin \lambda x)(C_{11} e^{-\lambda y} + C_{12} e^{\lambda y}) \end{aligned} \quad (6-11)$$

Terlihat bahwa adalah mungkin memenuhi kondisi batas fungsi sinus, untuk memudahkan dalam penyelesaian matematik, misalkan:

$$\theta = T - T_1$$

Maka kondisi batas:

$$\begin{aligned}\theta &= 0 && \text{pada } y = 0 \\ \theta &= 0 && \text{pada } x = 0 \\ \theta &= 0 && \text{pada } x = W\end{aligned}\tag{6-12}$$

$$\theta = T_m \sin \frac{\pi x}{W} \quad \text{pada } y = H$$

Dengan menggunakan kondisi ini:

$$0 = (C_9 \cos \lambda x + C_{10} \sin \lambda x)(C_{11} + C_{12})\tag{a}$$

$$0 = C_9 (C_{11} e^{-\lambda y} + C_{12} e^{\lambda y})\tag{b}$$

$$0 = (C_9 \cos \lambda W + C_{10} \sin \lambda W)(C_{11} e^{-\lambda y} + C_{12} e^{\lambda y})\tag{c}$$

$$T_m \sin \frac{\pi x}{W} = (C_9 \cos \lambda x + C_{10} \sin \lambda x)(C_{11} e^{-\lambda H} + C_{12} e^{\lambda H})\tag{d}$$

Sehingga: $C_{11} = -C_{12}$

$$C_9 = 0$$

Dan dari (c) : $0 = C_{10} C_{12} \sin \lambda W (e^{\lambda y} - e^{-\lambda y})$

Ini menghendaki: $\sin \lambda W = 0$ (6-13)

Perlu diingat bahwa λ adalah konstanta separasi yang belum ditentukan. Beberapa harga bisa memenuhi persamaan (6-13), dan bisa ditulis dengan:

$$\lambda = \frac{n\pi}{W}\tag{6-14}$$

dimana n adalah bilangan bulat. Jawaban akhir adalah deret tak terbatas:

$$\theta = T - T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{W} \sinh \frac{n\pi y}{W}\tag{6-15}$$

Kondisi batas akhir:

$$T_m \sin \frac{\pi x}{W} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{W} \sinh \frac{n\pi H}{W}$$

Untuk $n > 1$ maka $C_n = 0$, maka:

$$T = T_m \frac{\sinh(\pi y / W)}{\sinh(\pi H / W)} \sin\left(\frac{\pi x}{W}\right) + T_1 \quad (6-16)$$

Medan temperatur untuk persamaan ni ditunjukkan oleh gambar 2 diatas. Catat bahwa garis aliran kalor adalah tegak lurus terhadap isothermal.

Sekarang anggaplah kondisi batas sebagai berikut:

$$T = T_1 \text{ pada } y = 0$$

$$T = T_1 \quad \text{pada } x = 0$$

$$T = T_1 \quad \text{pada } x = W$$

$$T = T_2 \quad \text{pada } y = H$$

Dengan tiga kondisi batas pertama, diperoleh jawaban dalam bentuk persamaan (6-15):

$$T - T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{W} \sinh \frac{n\pi y}{W} \quad (6-17)$$

Dengan menerapkan kondisi batas keempat menghasilkan:

$$T_2 - T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{W} \sinh \frac{n\pi H}{W} \quad (6-18)$$

Persamaan diatas adalah deret sinus Fourier, dan harga C_n bisa dicari dengan mengembangkan perbedaan temperatur konstan $T_2 - T_1$ pada deret Fourier dengan interval $0 < x < W$. Deretnya adalah:

$$T_2 - T_1 = (T_2 - T_1) \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin \frac{n\pi x}{W} \quad (6-19)$$

Dari persamaan (6-18) dan (6-19) diperoleh:

$$C_n = \frac{2}{\pi} (T_2 - T_1) \frac{1}{\sinh(n\pi H / W)} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n}$$

dan persamaan akhir adalah:

$$\frac{T - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin \frac{n\pi x}{W} \frac{\sinh(n\pi y/W)}{\sinh(n\pi H/W)} \quad (6-20)$$

Analisis Grafik

Anggaplah sebuah sistem dua dimensi seperti yang ditunjukkan oleh gambar 3. Permukaan dalam diatur pada temperatur tertentu yaitu T_1 , dan bagian luar dijaga pada temperatur T_2 . Garis isothermal dan aliran panas telah digambar untuk memudahkan analisis.

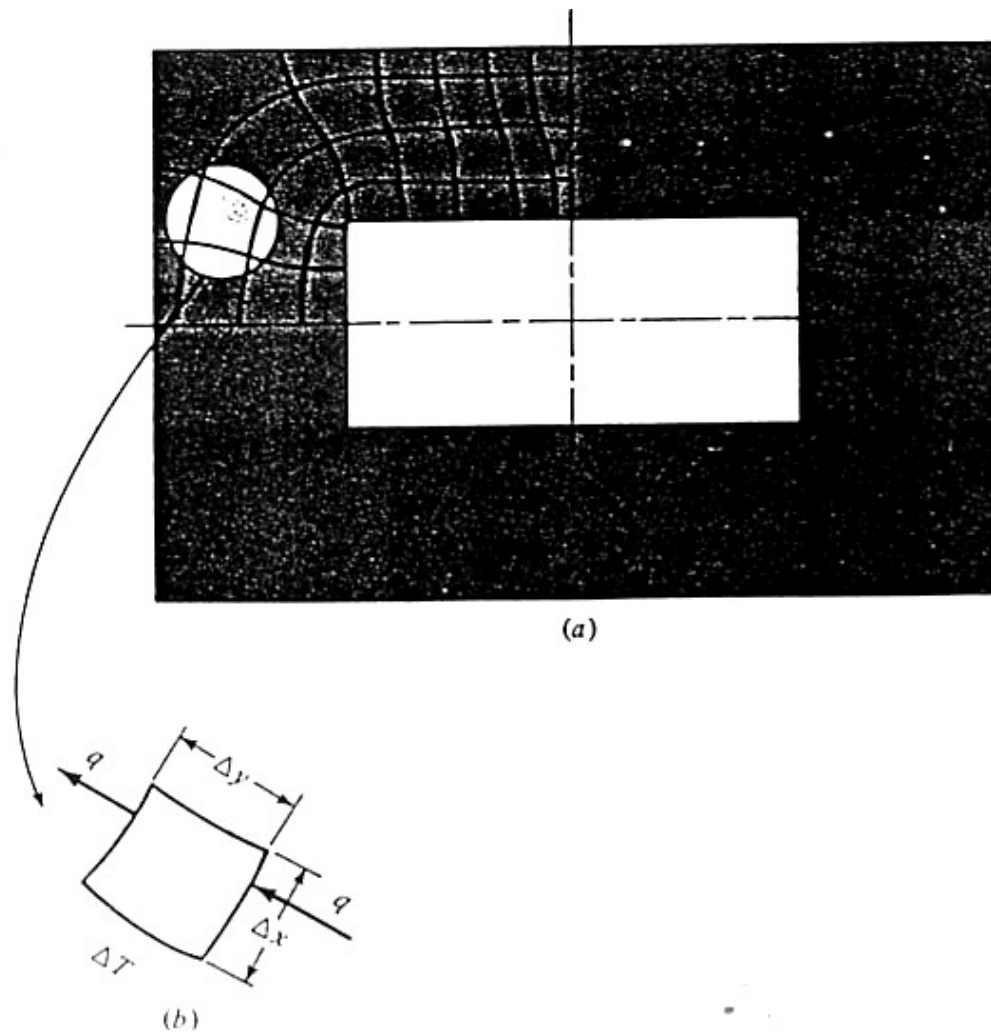


Fig. 3-3 Sketch showing element used for curvilinear-square analysis of two-dimensional heat flow.

Garis isothermal dan aliran kalor membentuk group gambar kurvalinier seperti gambar 3b. Aliran kalor melalui bidang kurva linier ini adalah:

$$q = -k\Delta x(1) \frac{\Delta T}{\Delta y} \quad (6-21)$$

Jika $\Delta x \cong \Delta y$ maka:

$$\Delta T = \frac{\Delta T_{keseluruhan}}{N}$$

dimana N adalah jumlah kenaikan temperatur antara permukaan bagian dalam dan permukaan luar. Jika M jumlah bidang aliran panas maka aliran panas total:

$$q = \frac{M}{N} k \Delta T_{keseluruhan} = \frac{M}{N} k (T_2 - T_1) \quad (6-22)$$

Faktor Bentuk Konduksi

Pada sistem dua dimensi dimana hanya ada dua batas temperatur, kita bisa mendefinisikan *faktor bentuk konduksi S* yaitu:

$$q = kS \Delta T_{keseluruhan} \quad (6-23)$$

Harga S telah dicari untuk berbagai bentuk benda dan ditabelkan pada tabel 1.

Table 3-1 Conduction Shape Factors, Summarized from Refs. 6 and 7

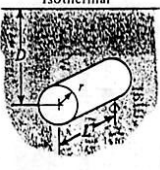
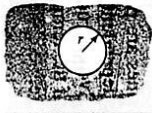
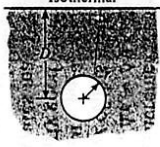
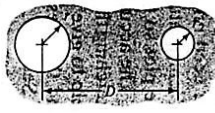
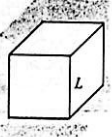
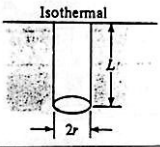
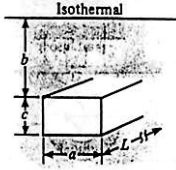

Physical system	Schematic	Shape factor	Restrictions
Isothermal cylinder of radius r buried in semi-infinite medium having isothermal surface		$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}(D/r)}$ $\frac{2\pi L}{\ln(2D/r)}$ $\frac{2\pi L}{\ln \frac{L}{r} \left[1 - \frac{\ln(L/2D)}{\ln(L/r)} \right]}$	$L \gg r$ $L \gg r$ $D > 3r$ $D \gg r$ $L \gg D$
Isothermal sphere of radius r buried in infinite medium		$4\pi r$	
Isothermal sphere of radius r buried in semi-infinite medium having isothermal surface		$\frac{4\pi r}{1 - r/2D}$	
Conduction between two isothermal cylinders buried in infinite medium		$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1} \left(\frac{D^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1 r_2} \right)}$	$L \gg r$ $L \gg D$
Buried cube in infinite medium, L on a side		$8.24L$	
Isothermal cylinder of radius r placed in semi-infinite medium as shown		$\frac{2\pi L}{\ln(2L/r)}$	$L \gg 2r$
Isothermal rectangular parallelepiped buried in semi-infinite medium having isothermal surface		$1.685L \left[\log \left(1 + \frac{b}{a} \right) \right]^{-0.59} \left(\frac{b}{c} \right)^{-0.078}$	See Ref. 7
Plane wall		$\frac{A}{L}$	One-dimensional heat flow

Table 3-1 Conduction Shape Factors, Summarized from Refs. 6 and 7 (Continued)

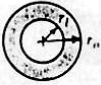
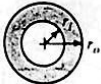

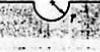

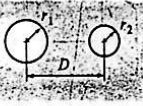
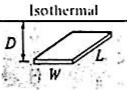


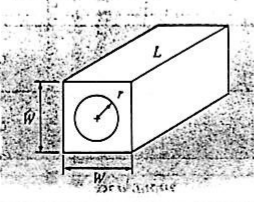
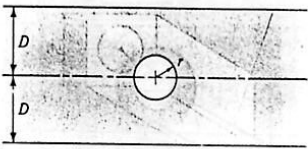
Physical system	Schematic	Shape factor	Restrictions
Hollow cylinder, length L		$\frac{2\pi L}{\ln(r_o/r_i)}$	$L \gg r$
Hollow sphere		$\frac{4\pi r_o r_i}{r_o - r_i}$	
Thin horizontal disk buried in semi-infinite medium with isothermal surface		$4r$ $8r$	$D = 0$ $D \gg 2r$
Hemisphere buried in semi-infinite medium		$2\pi r$	
Isothermal sphere buried in semi-infinite medium with insulated surface		$\frac{4\pi r}{1 + r/2D}$	
Two isothermal spheres buried in infinite medium		$\frac{4\pi}{\frac{r_2}{r_1} \left[1 - \frac{(r_1/D)^4}{1 - (r_2/D)^2} \right] - \frac{2r_2}{D}}$	$D > 5r_{max}$
Thin rectangular plate of length L , buried in semi-infinite medium having isothermal surface		$\frac{\pi W}{\ln(4W/L)}$ $\frac{2\pi W}{\ln(4W/L)}$ $\frac{2\pi W}{\ln(2\pi D/L)}$	$D = 0$ $W > L$ $D \gg W$ $W > L$ $W \gg L$ $D > 2W$
Parallel disks buried in infinite medium		$\frac{4\pi}{2 \left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(r/D) \right]}$	$D > 5r$ r/D in radians
Eccentric cylinders of length L		$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1} \left(\frac{r_1^2 + r_2^2 - D^2}{2r_1 r_2} \right)}$	$L \gg r_2$
Cylinder centered in a square of length L		$\frac{2\pi L}{\ln(0.54W/r)}$	$L \gg W$

Table 3-1 Conduction Shape Factors, Summarized from Refs. 6 and 7 (Continued)

Physical system	Schematic	Shape factor	Restrictions
Horizontal cylinder centered in infinite plate		$\frac{2\pi L}{\ln(4D/r)}$	

Perlu dicatat bahwa invers cosinus hiperbolik dirumuskan:

$$\cosh^{-1} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$$

Untuk dinding tiga dimensi seperti pada dapur pemanas, faktor bentuk yang terpisah digunakan untuk menghitung aliran kalor pada bidang sisi dan sudut. Jika semua dimensi dalam lebih besar dari seperlima tebal dinding,

$$S_{\text{dinding}} = \frac{A}{L} \qquad S_{\text{sisi}} = 0,54D \qquad S_{\text{sudut}} = 0,15L$$

Dimana: A = luas dinding

L = tebal dinding

D = panjang sisi

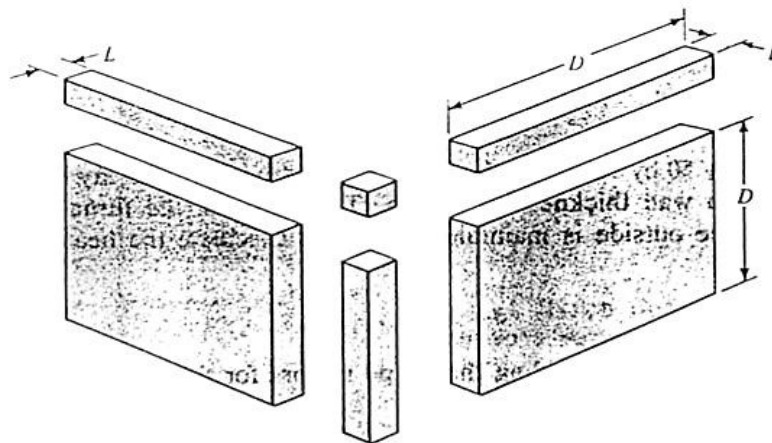


Fig. 3-4 Sketch illustrating dimensions for use in calculating three-dimensional shape factors.

Contoh soal 6-1:

Sebuah pipa horisontal dengan diameter 15 cm dan panjang 4 m dikubur didalam tanah dengan kedalaman 20 cm. Temperatur dinding pipa adalah 75 °C, dan temperatur permukaan 15 °C. Termal konduktivitas tanah adalah 0,8 W/m.°C. Hitunglah kerugian panas oleh pipa.

Jawab:

Faktor bentuk dari soal ini diberikan oleh tabel 1. Karena $D < 3r$,

$$S = \frac{2\pi L}{\cosh^{-1}(D/r)} = \frac{2\pi (4)}{\cosh^{-1}(20/7,5)} = 15,35 \text{ m}$$

aliran kalor:

$$q = kS \Delta T = (0,8)(15,35)(75 - 5) = 859,6 \text{ W}$$

Contoh soal 6-2:

Sebuah dapur pemanas kubus dengan ukuran 50 x 50 cm pada sisi dalam dibuat dari bata tahan api ($k = 1,04 \text{ W/m.}^\circ\text{C}$) dengan tebal dinding 10 cm. Bagian dalam dapur dijaga suhunya pada 500 °C, dan suhu pada bagian luar adalah 50 °C. Hitunglah kerugian kalor melalui dinding.

Jawab:

Kita hitung faktor bentuk total dengan menjumlahkan faktor bentuk dari dinding, sisi dan sudut.

$$\text{Dinding: } S = \frac{A}{L} = \frac{(0,5)(0,5)}{0,1} = 2,5 \text{ m}$$

$$\text{Sisi: } S = 0,54D = 0,54 (0,5) = 0,27 \text{ m}$$

$$\text{Sudut: } S = 0,15L = 0,15 (0,1) = 0,015 \text{ m}$$

Ada 6 buah penampang dinding, 12 sisi dan 8 sudut, sehingga faktor bentuk total:

$$S = (6)(2,5) + (12)(0,27) + (8)(0,015) = 18,36 \text{ m}$$

Dan aliran kalor:

$$q = kS \Delta T = (1,04)(18,36)(500 - 50) = 8,592 \text{ kW}$$