Energi masuk dari permukaan kiri = $q_x = -kA\dfrac{dT}{dx}$

Energi keluar di permukaan kanan :

$$= q_{x+dx} = -kA\left.\frac{dT}{dx}\right]_{x+dx}$$

$$= -kA\left(\frac{dT}{dx} + \frac{d^2T}{dx^2}dx\right)$$

Kehilangan energi karena konveksi = $hP\,dx\,(T - T_\infty)$

sehingga :

$$-kA\frac{dT}{dx} = -kA\left(\frac{dT}{dx} + \frac{d^2T}{dx^2}dx\right) + hPdx(T - T_\infty)$$

$$-kA\frac{dT}{dx} = -kA\frac{dT}{dx} - kA\frac{d^2T}{dx^2}dx + hPdx(T - T_\infty)$$

$$kA\frac{d^2T}{dx^2}dx - hPdx(T - T_\infty) = 0$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{kA}(T - T_\infty) = 0$$

….. (5.29*a*)

Ambil $\theta = T - T_\infty$

Sehingga :

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{hP}{kA}\theta = 0 \qquad (5.29b)$$

Kondisi batas:

$\theta = \theta_0 = T_0 - T_\infty$ pada $x = 0$

Kondisi batas lainnya tergantung pada situasi fisik. Beberapa kasus yang mungkin:

Kasus 1 : sirip sangat panjang dan temperatur pada ujung sirip sama dengan fluida disekelilingnya.

Kasus 2 : sirip panjangnya terbatas dan kerugian kalor secara konveksi pada ujungnya.

Kasus 3 : ujung sirip terisolasi sehingga $\dfrac{dT}{dx} = 0$ pada x = L

Misalkan : $m^2 = hP/kA$

Bentuk umum persamaan 5.29*b* adalah:

$$\theta = C_1 e^{-mx} + C_2 e^{mx} \qquad (5.30)$$

- Untuk kasus 1, batas kondisi:

$\theta = \theta_0$ pada x=0

$\theta = 0$ pada x=∞

sehingga :

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-mx} \qquad (5.31)$$

- Untuk kasus 3, kondisi batas adalah:

$\theta = \theta_0$ pada x = 0

$\dfrac{d\theta}{dx} = 0$ pada x = L

sehingga : $\theta_0 = C_1 + C_2$

$0 = m(-C_1 e^{-mx} + C_2 e^{mx})$

dengan meeliminasi C_1 dan C_2 didapat:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{e^{-mx}}{1 + e^{-2mL}} + \frac{e^{mx}}{1 + e^{2mL}} \qquad (5.32a)$$

$$= \frac{\cosh[m(L - x)]}{\cosh mL} \qquad (5.32b)$$

Catatan:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad ; \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

- Untuk kasus 2, penyelesaian persamaan berupa turunan aljabar dan hasilnya:

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = \frac{\cosh m(L - x) + (h/mk)\sinh m(L - x)}{\cos ml + (h/mk)\sinh mL} \qquad (5\text{-}33)$$

Semua kerugian kalor pada sirip dikonduksikan pada $x = 0$.

Kerugian kalor bisa dihitung dengan:

$$q = -kA\frac{dT}{dx}\bigg]_{x=0}$$

Atau dengan alternatif lain dengan cara integrasi:

$$q = \int_0^L hP(T - T_w)dx = \int_0^L hP\theta\, dx$$

Sehingga kerugian kalor untuk kasus 1:

$$q = -kA(-m\theta_0 e^{-m(0)}) = \sqrt{hPkA}\ \theta_0 \qquad (5\text{-}34)$$

Untuk kasus 2:

$$q = \sqrt{hPkA}\ (T_0 - T_{\infty})\frac{\sinh mL + (h/mk)\cosh mL}{\cosh mL + (h/mk)\sinh mL} \qquad (5\text{-}35)$$

Untuk kasus 3:

$$\begin{aligned} q &= -kA\theta_0 m\left(\frac{1}{1 + e^{-2mL}} - \frac{1}{1 + e^{+2mL}}\right) \\ &= \sqrt{hPkA}\ \theta_0 \tanh mL \end{aligned} \qquad (5\text{-}36)$$

Rumus-rumus diatas digunakan atas asumsi bahwa gradien temperatur terjadi hanya pada arah *x*.